Раздел 3. Тема 1. Занятие 1.

Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x, y) действительных чисел x и y. Первая компонента x пары называется действительной частью, вторая компонента y – мнимой частью, и для них приняты обозначения $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Числа $(0,0) = 0$, $(1,0) = 1$ и $(0,1) = i$ называются нулем, единицей и мнимой единицей.

Комплексные числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, а их произведением – комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Вычитание и деление комплексных чисел вводятся как действия, обратные сложению и умножению соответственно. Комплексное число $z = (x, 0)$ отождествляется с действительным числом x, а комплексное число $z = (0, y)$ называется чисто мнимым и представимо в виде $(0, y) = iy$. Таким образом, для комплексного числа $z = (x, y)$ справедливо равенство $z = x + iy$. Будем интерпретировать комплексное число $z = x + iy$ как точку (x, y) на координатной плоскости. Множество комплексных чисел обозначим $\mathbb{C}$.

Комплексно-сопряженным числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = x - iy$. Справедливы соотношения:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2\ ;\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\ ;\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad (z_2 \neq 0).$$

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное действительное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Справедливы равенства:

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}}\ ,\quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\ ,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\quad (z_2 \neq 0).$$

Угол φ, составленный радиусом-вектором точки z $(z \neq 0)$ с положительным направлением оси Ox, называется аргументом числа z. Аргумент определен с точностью до $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$. Значения аргумента, принадлежащие полуинтервалу $(\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$, где φ_0 – некоторое фиксированное значение, называется главным и обозначается $\arg z$. Обычно $\varphi_0 = 0$ либо $\varphi_0 = -\pi$. Если $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то возможно представление комплексного числа z в виде $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Такая запись называется тригонометрической формой комплексного числа. Для $z = 0$ аргумент не определен, но модуль равен 0. Справедливы соотношения:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|\ ,\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right) \quad ,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right) \quad ,$$

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1,\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2).$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, предыдущие соотношения перепишем в виде:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z^n = |z|^n e^{in\varphi} .$$

Корнем натуральной степени n из комплексного числа z называется такое число, которое, будучи возведенным в степень n, даст z. Если $z \neq 0$, имеем ровно n различных значений корня

$$(\sqrt[n]{z})_k = |z|^{1/n} e^{i(\varphi+2\pi k)/n} \quad , \quad k = \overline{0,(n-1)} \quad ,$$

где $\varphi = \arg z$, $|z|$ — модуль числа z.

Далее под главным значением аргумента будем считать значение аргумента из полуинтервала $(-\pi, \pi]$.

Семинар 1.

1.2

1. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^3 = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = i$

$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

3. $(1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}\right) =$

$= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{\pi n}{4} - i\sin\frac{\pi n}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{\pi n}{4}.$

4. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{-i\frac{\pi n}{2}}$

если $n = 2k$, то $e^{-i\pi k} = \cos\pi k - i\sin\pi k = (-1)^k$

если $n = 2k+1$, то $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right) = (-1)^{k+1} i$

5. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6} = 16\cdot\frac{1}{64} = \frac{1}{4}.$

$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = 16e^{i2\pi} = 16$

$(1-i\sqrt{3})^{-6} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{-6} = \frac{1}{64}e^{i2\pi} = \frac{1}{64}$

6. $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}} = \frac{-2^{50}}{2^{48}+2^{49}} = -\frac{4}{1+2} = -\frac{4}{3}.$

$(1+i)^{100} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{100} = 2^{50}e^{i25\pi} = -2^{50}$

$(1-i)^{96} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{96} = 2^{48}e^{-i24\pi} = 2^{48}$

$(1+i)^{98} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{98} = 2^{49}e^{i\frac{49\pi}{2}} = 2^{49}\left(\cos\frac{49\pi}{2} + i\sin\frac{49\pi}{2}\right) = 2^{49}i$

8. $\left(\frac{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^n = \left(\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha}\right)^n = \left(\frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}}\right)^n = e^{-i2\alpha n} = \cos(2\alpha n) - i\sin(2\alpha n).$

9. $(1+\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} + i2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n$

$= 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\, e^{i\frac{\varphi}{2}n} = 2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi n}{2} + i\sin\frac{\varphi n}{2}\right).$

10. $(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2}+i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n=$

$=2^n\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n\left(\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n=2^n\sin^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right)^n=$

$=2^n\sin^n\frac{\varphi}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)n}=2^n\sin^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)n+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)n\right).$

1.4 1. $\frac{2}{1-3i}=\frac{2(1+3i)}{1+9}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{1}=3\Rightarrow\varphi=\operatorname{arctg}3+\pi n\Rightarrow(\varphi)_{гл}=\operatorname{arctg}3.$

2. $(1+i\sqrt{3})^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=8e^{i\pi}$

модуль $=8$, $(\varphi)_{гл}=\pi$.

3. $\left(\frac{4}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{12}=\left(\frac{4}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right)^{12}=\left(2e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^{12}=2^{12}e^{-i8\pi}=2^{12}e^{-i\cdot 0}$

модуль $=2^{12}$ $(\varphi)_{гл}=0$.

4. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}=(\text{по } 1.2\ 5))=\frac{1}{4}$

модуль $=\frac{1}{4}$ $(\varphi)_{гл}=0$.

5. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n=e^{-i\frac{\pi n}{2}}$ по 1.2 4)

если $n=2k$, то получаем $(-1)^k$

модуль $=1$, а $(\varphi)_{гл}=\begin{cases}0 & \text{при } k=2l\\ \pi & \text{при } k=2l+1\end{cases}$

если $n=2k+1$, то получаем $(-1)^{k+1}i$

модуль $=1$, а $(\varphi)_{гл}=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & \text{при } k=2l\\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k=2l+1.\end{cases}$

6. $-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=e^{i\frac{5\pi}{6}}$

модуль $=1$, $(\varphi)_{гл}=\frac{5\pi}{6}$.

7. $\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$

модуль $=1$, $(\varphi)_{гл}=-\frac{\pi}{4}$.

8. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$, $0\leq\alpha\leq 2\pi$

$1+\cos\alpha+i\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

$=2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$

если $\alpha\in[0,\pi]$, то $\frac{\alpha}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$ и $\cos\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$

модуль $=2\cos\frac{\alpha}{2}$, $(\varphi)_{гл}=\frac{\alpha}{2}$

если $\alpha\in(\pi,2\pi]$, то $\frac{\alpha}{2}\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ и $\cos\frac{\alpha}{2}<0$

$=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|e^{-i\pi}\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|e^{i(-\pi+\frac{\alpha}{2})}$

модуль $=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$, $(\varphi_{гл})=-\pi+\frac{\alpha}{2}$.

1.15 а Рассмотрим уравнение

2) $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1$, $|a|<1$.

$|z-a|=|1-\bar{a}z|\Rightarrow|z-a|^2=|1-\bar{a}z|^2\Rightarrow(z-a)\overline{(z-a)}=(1-\bar{a}z)\overline{(1-\bar{a}z)}$

$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})\Rightarrow z\bar{z}-\cancel{z\bar{a}}-\cancel{a\bar{z}}+a\bar{a}=1-\cancel{a\bar{z}}-\cancel{\bar{a}z}+\bar{a}za\bar{z}$

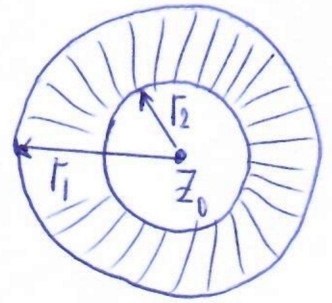
$(1-a\bar{a})z\bar{z}-(1-a\bar{a})=0\Rightarrow(1-a\bar{a})(z\bar{z}-1)=0$

$(1-|a|^2)(|z|^2-1)=0\Rightarrow|z|=1$ - единичная окружность

Тогда 1) $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|<1\Rightarrow(1-|a|^2)(|z|^2-1)<0\Rightarrow|z|<1$ - это внутри окружности

3) $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| > 1 \Rightarrow (1-|a|^2)(|z|^2-1) > 0 \Rightarrow |z| > 1$ — это вне окружности.

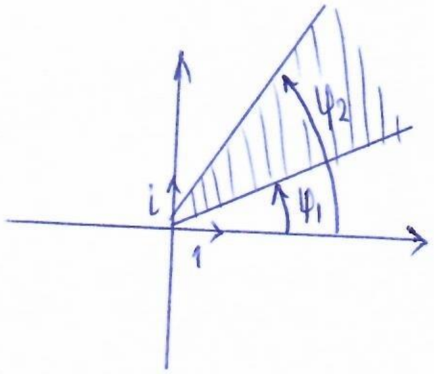
1.13 1. $r_2 < |z-z_0| < r_1$, $0 \le r_2 < r_1$



это кольцо

2. $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$

это угол.



3. $\operatorname{Re} z^{-1} = C$, $C = \mathrm{const}$

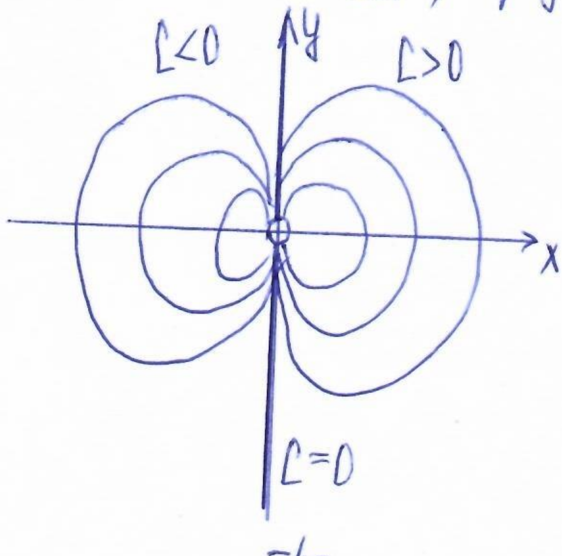
$z = x+iy \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \operatorname{Re} z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\dfrac{x}{x^2+y^2} = C$ и $(x,y) \neq 0$

если $C = 0$, то $x = 0$

если $C \neq 0$, то $x^2+y^2 = \dfrac{1}{C}x \Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4C^2}$

это окружность с центром в $\left(\dfrac{1}{2C}, 0\right)$ и радиуса $\dfrac{1}{2|C|}$.



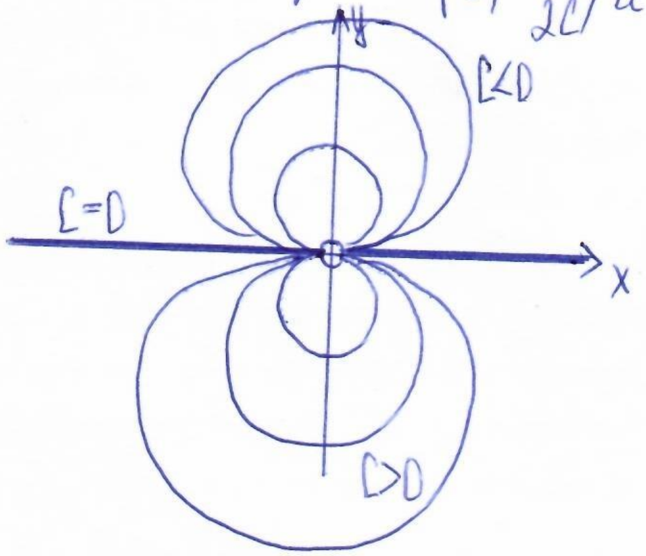
4. $\operatorname{Im} z^{-1} = C$, $C = \text{const}$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \operatorname{Im} z^{-1} = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow -\frac{y}{x^2+y^2} = C \text{ и } (x,y) \neq 0.$$

если $C = 0$, то $y = 0$

если $C \neq 0$, то $x^2+y^2 = -\frac{1}{C}y \Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$

Это окружность с центром в $\left(0, -\frac{1}{2C}\right)$ и радиуса $\frac{1}{2|C|}$.

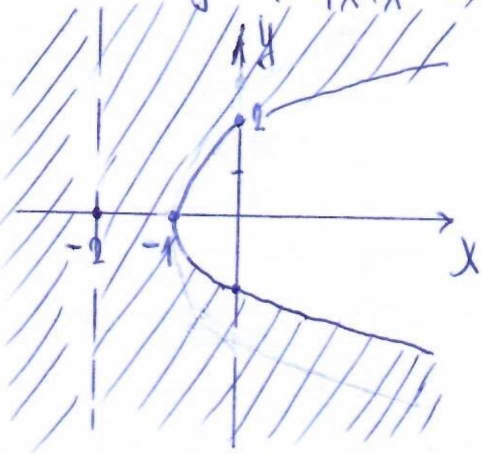


8. $|z| > 2 + \operatorname{Re} z$

$z = x + iy \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} > 2 + x$

если $x+2 < 0$, то все точки (x,y)

если $x+2 \geq 0$, то $x^2+y^2 > 4+4x+x^2 \Rightarrow x < \frac{y^2}{4} - 1$

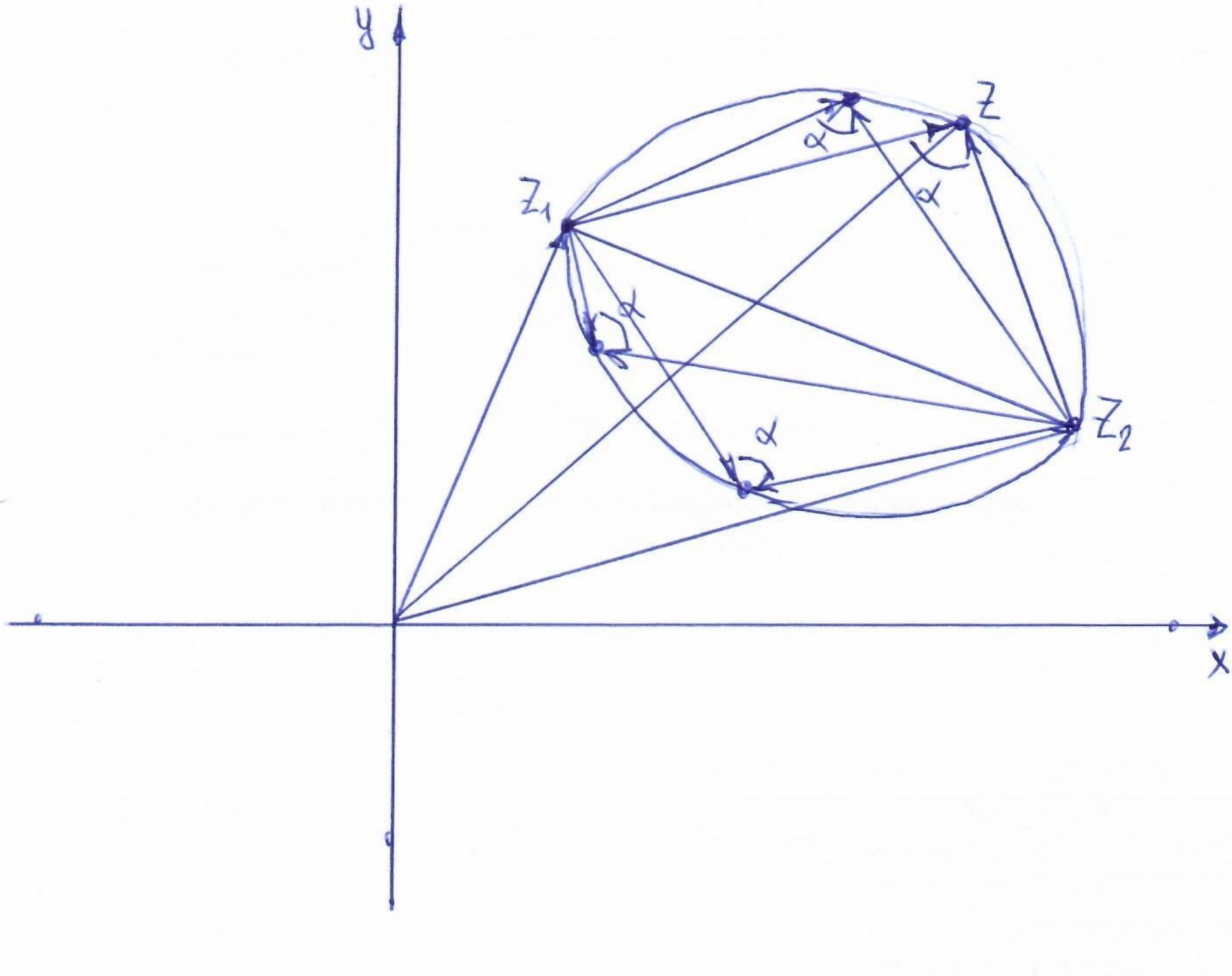


штрихованная область

5) Найти ГМТ на плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющее условию:

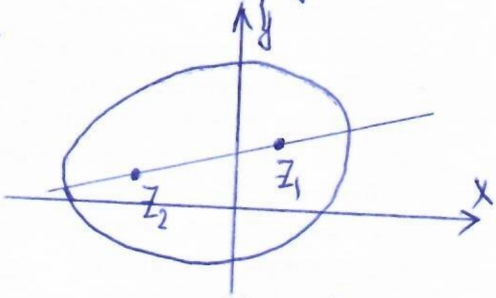
$$\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha, \quad -\pi < \alpha \le \pi.$$

Решение: поскольку $\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \arg(z-z_1) - \arg(z-z_2) = \alpha$, $-\pi < \alpha \le \pi$, то это равенство определяет семейство дуг окружностей с концами в точках z_1, z_2 (угол между векторами $(z-z_1)$, $(z-z_2)$ равен α). В это семейство входит конечный отрезок с концами в точках z_1, z_2 (при $\alpha = \pi$) и бесконечный отрезок, соединяющий бесконечно удаленную точку (при $\alpha = 0$).



6. $|z-z_1|+|z-z_2|=a$, $a>|z_1-z_2|$

Равенство определяет геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек $F_1=z_1$ и $F_2=z_2$ есть постоянное число a, которое больше расстояние между ними. Из аналитической геометрии известно, что это по определению эллипс. Фокусы эллипса — точки z_1 и z_2. большая полуось — a.



7. $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=a$, $a<|z_1-z_2|$

Геометрическое место точек на плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих этому условию, является гиперболой с фокусами в точках z_1 и z_2 и действительной полуосью, равной a. Равенство $|z-z_1|-|z-z_2|=a$ определяет левую ветвь гиперболы, а противоположное равенство $|z-z_2|-|z-z_1|=a$ задает ее правую ветвь.

1.25 1. $\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{2}}}$

$$z_{k+1}=e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)/3},\quad k=0,1,2$$

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_2=e^{i\frac{5\pi}{6}},\ z_3=e^{i\frac{9\pi}{6}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_3=-i$$

2. $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{e^{i\pi}}$

$$z_{k+1}=e^{i(\pi+2\pi k)/4},\quad k=0,1,2,3$$

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}},\ z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}},\ z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),\ z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),\ z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

3) $\sqrt{1-i} = \sqrt{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

$$z_{k+1} = \sqrt[4]{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)/2}, \quad k=0,1$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right), \quad z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

4) $\sqrt[5]{-4+3i} = \sqrt[5]{5e^{i\alpha}}$, где $\alpha = \pi - \arcsin\frac{3}{5}$.

$$z_{k+1} = \sqrt[5]{5}\, e^{i(\alpha+2\pi k)/5}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

5) $\sqrt{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

$$z_{k+1} = e^{i(-\frac{\pi}{3}+2\pi k)/2}, \quad k=0,1$$

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

6) $\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}}$

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{2e^{i\frac{\pi}{3}}} \Rightarrow \hat{z}_{k+1} = \sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{3}+2\pi k)/2}, \quad k=0,1$$

$$\sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} \Rightarrow \tilde{z}_{k+1} = \sqrt{2}\, e^{i(-\frac{\pi}{3}+2\pi k)/2}, \quad k=0,1$$

$$\hat{z}_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad \hat{z}_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{6}} \quad ; \quad \tilde{z}_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad \tilde{z}_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$\hat{z}_1 + \tilde{z}_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{6}$$

$$\hat{z}_1 + \tilde{z}_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}i$$

$$\hat{z}_2 + \tilde{z}_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2}i$$

$$\hat{z}_2 + \tilde{z}_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{6}.$$

7. $\sqrt{1+e^{i\varphi}}$, $-\pi<\varphi\le\pi$.

$1+e^{i\varphi}=1+\cos\varphi+i\sin\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}+i\,2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=2\cos\frac{\varphi}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}$

$-\frac{\pi}{2}<\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{\varphi}{2}\ge 0.$

$$z_{k+1}=\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,e^{i(\frac{\varphi}{2}+2\pi k)/2},\quad k=0,1$$

$$z_1=\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,e^{i\frac{\varphi}{4}},\quad z_2=\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,e^{i(\frac{\varphi}{4}+\pi)}=-\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,e^{i\frac{\varphi}{4}}.$$

9. $\sqrt{z^2-1}$, $z=1+i$

$z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow z^2=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i\Rightarrow\sqrt{-1+2i}=\sqrt{\sqrt{5}e^{i\alpha}},\ \alpha=\pi-\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$z_{k+1}=\sqrt[4]{5}\,e^{i(\alpha+2\pi k)/2},\quad k=0,1$$

$$z_1=\sqrt[4]{5}\,e^{i\frac{\alpha}{2}},\quad z_2=\sqrt[4]{5}\,e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi)}=-\sqrt[4]{5}\,e^{i\frac{\alpha}{2}}.$$

10. $\sqrt[8]{1+i}=\sqrt[8]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$$z_{k+1}=\sqrt[16]{2}\,e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)/8},\quad k=0,1,2,3,4,5,6,7.$$

$$z_{k+1}=\sqrt[16]{2}\,e^{i(\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{4}k)},\quad k=0,1,2,3,4,5,6,7.$$

11. $\sqrt[7]{-1}=\sqrt[7]{e^{i\pi}}$

$$z_{k+1}=e^{i(\pi+2\pi k)/7},\quad k=0,1,2,3,4,5,6$$

$$z_{k+1}=e^{i(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k)},\quad k=0,1,2,3,4,5,6.$$

8) $\sqrt{i+e^{i\varphi}}$, $-\pi < \varphi \le \pi$.

Рассмотрим $z = i + e^{i\varphi} = \cos\varphi + i(1+\sin\varphi)$

Пусть α — значение аргумента z:

$$tg\alpha = \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{1+tg\frac{\varphi}{2}}{1-tg\frac{\varphi}{2}}$$

$$\alpha = arctg\,\frac{1+tg\frac{\varphi}{2}}{1-tg\frac{\varphi}{2}}$$

$$|z|^2 = \cos^2\varphi + (1+\sin\varphi)^2 = 2+2\sin\varphi = 2\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

$$|z| = \sqrt{2}\left|\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right|$$

$$z = \sqrt{2}\left|\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right| e^{i\alpha} \Rightarrow$$

$$\sqrt{z} = \sqrt[4]{2}\sqrt{\left|\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right|}\, e^{i\frac{\alpha+2\pi k}{2}}, \quad k=0,1$$

$k=0$: $\sqrt{z} = \sqrt[4]{2}\sqrt{\left|\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right|}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}$

$k=1$: $\sqrt{z} = \sqrt[4]{2}\sqrt{\left|\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right|}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)} = -\sqrt[4]{2}\sqrt{\left|\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right|}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}$

Значит,

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt[4]{2}\sqrt{\left|\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right|}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}.$$